



## Diferensial tənliklərin Eyler və Runqe-kutta üsulu ilə təqribi həllinin müqayisəli təhlili

Sima Paşayeva

**Xülasə.** Məqalədə diferensial tənliklərin qeyri-kvadratur həlli, yəni, ədədi üsulla həlli ilə kvadratura ilə həllinin müqayisəli təhlili verilmişdir. Baxılan problemdə verilmiş diferensial tənliyin Eyler və Runqe-Kutta üsulları vasitəsilə təqribi həlli ilə və bu tənliyin dəqiq həllindən alınmış nəticələr müqayisə edilmişdir. Qoyulmuş məsələnin həlli həm analitik, həm də cədvəl və qrafiki şəkildə verilmişdir. Nəticələrin təhlili göstərir ki, məsələnin Eyler üsulu ilə həllində dəqiqlik Runqe-Kutta ədədi üsulu ilə həllinin dəqiqliyindən nisbətən çoxdur. Bu məsələnin ədədi üsulla həllində verilmiş parçanın korrekt bölgüsü və bu bölgüdə addımların seçilməsinin dəqiqliyi izah olunur. Hər bir dəqiq seçilmiş addımda düz xətlərin kəsişmə nöqtələri və bu nöqtələrdə integral ayrısına çəkilmiş toxunanların bucaq əmsalları tapılmışdır ki, bu da uyğun funksiya artımı və integral ayrısının istənilən nöqtəsində toxunanının istiqamətinin meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşdüyünü göstərir.

**Açar sözlər:** Leonard Eyler üsulu, Runqe-Kutta üsulu, integral ayrısı, artımlar nisbəti, integral ayrısı, sınıq xətlər sxemi

Milli Müdafiə Universiteti, fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, Bakı, Azərbaycan

E-poçt: [sima.pashayeva73@gmail.com](mailto:sima.pashayeva73@gmail.com)

Daxil oldu: 3 Fevral 2026; Qəbul edildi: 6 May 2026; Onlayn dərc edildi: 30 May 2026

© Müəllif(lər) 2026. Bu, Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 Beynəlxalq Lisenziyası (CC BY-NC 4.0) şərtləri altında paylanan açıq girişli məqalədir.

## Comparative Analysis of Approximate Solutions of Differential Equations Using Euler and Runge-kutta Methods

Sima Pashayeva

**Abstract.** The article presents a comparative analysis of non-quadratic solutions of differential equations, that is, numerical solutions and quadrature solutions. In the problem under consideration, the results obtained from an approximate solution of a given differential equation using the Euler and Runge-Kutta methods were compared with the results obtained from an exact solution of this equation. The solution to the problem is presented in analytical, tabular and graphical form. The analysis of the results shows that the accuracy of the solution of the problem using the Euler method is relatively higher than the accuracy of the solution using the Runge-Kutta numerical method. This explains the correct division of a given segment in the numerical solution of the problem and the accuracy of the choice of steps in this division.

*At each precisely chosen step, the intersection points of the lines and the angular coefficients of the tangents drawn to the integral curve at these points were found, which shows that the direction of the tangent at any point of the corresponding increment of the function and the integral curve coincides with the direction field.*

**Keywords:** Leonard Euler method, Runge-Kutta method, integral curve, increment ratio, integral curve, broken line scheme

---

National Defense University, PhD in Physics and Mathematics, Baku, Azerbaijan

E-mail: sima.pashayeva73@gmail.com

Received: 3 February 2026; Accepted: 6 May 2026; Published online: 30 May 2026

© Author(s) 2026. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

## Giriş

Diferensial tənliklərin qurulması və həll edilməsi və nəticələrin təhlili elm və texnikanın müxtəlif sahələri üçün, o cümlədən, fizika, kimya, biologiya, tibb elmi, iqtisadiyyat, textika və hərbi işdə nəzəri və tətbiqi əhəmiyyət kəsb edir. Dəqiq həllin tapılması metodları məlum olmadıqda diferensial tənliklərin həllini təqribi və ya ədədi üsullarla tapmaq olur. Bu məqsədlə diferensial tənliklərin inteqrallanması üçün mövcud olan Leonard Eyler və Runqe-Kutta təqribi hesablamaya üsullarından və dəqiq həldən alınmış nəticələr müqayisə edilmişdir.

## Tədqiqat

*Məsələnin qoyuluşu və həlli.* Dəqiq həllinin tapılması mümkün olmayan diferensial tənliklərin təqribi və ya ədədi həll üsullarından daha dəqiq və üstün olanının seçilməsində alınan qiymətlərin müqayisəli təhlili zəruridir. Bu məqsədlə verilmiş birtərtibli diferensial tənliyin Leonard Eyler və Runqe-Kutta təqribi hesablamaya üsullarının tətbiqindən və dəqiq həldən alınmış nəticələri müqayisə edilmişdir. Əgər

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

birtərtibli diferensial tənliyinin  $[x_0, b]$  parçasında

$$y_0 = y(x_0) \quad (2)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini təqribi metodla tapmaq tələb olunursa, onda diferensial tənliyin  $y(x)$  həlli elementar funksiyalar və ya onların inteqralı vasitəsilə ifadə olunan müəyyən  $\{y_n(x)\}$  ardıcılığının limiti olaraq tapılır və kifayət qədər böyük  $n$  ədədləri üçün  $y_n(x)$  funksiyası həllin təqribi qiymətləri olur (İpatova və b., 2012):  $y(x) \approx y_n(x)$ . Bu halda həll cədvəl şəklinə gətirilir. Hər hansı  $\sigma$  oblastında təyin olunmuş və onun bütün nöqtələrində sonlu qiymətlər alan  $f(x, y)$  funksiyası üçün (1) birtərtibli diferensial tənliyinin inteqral əyrisi üzərində yerləşən hər bir  $(x, y) \in \sigma$  nöqtəsində əyriyə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı  $y'$  və ya  $f(x, y)$  olduğundan

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y) \quad (3)$$

olur. Bu baxımdan  $y = \varphi(x)$  inteqral əyrisinin kifayət qədər kiçik hissəsinin toxunanını sabit hesab edərək bu kəsilməz əyrini sınıq xətlə əvəz etmək olar. Bu isə yekunda birtərtibli diferensial tənliyin sağ tərəfi olan kəsilməz  $f(x, y)$  üçün (2) başlanğıc şərtini ödəyən  $y = y(x)$  inteqral əyrisinin tapılmasına gətirilir. Məlumdur ki, diferensial tənliyi həll etmək həndəsi olaraq elə əyri tapmaq deməkdir

ki, bu əyrinin istənilən nöqtəsində əyrirə toxunanın istiqaməti uyğun nöqtədə meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşsün. Diferensial tənliklərin inteqrallanması üçün Eyley ədədi metodunun əsas prinsipi verilmiş diferensial tənlikdə törəməni artımlar nisbəti ilə əvəz etməkdir (Astaşova, 2012).

Tutaq ki,

$$y_k = y(x_k), \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x} = f(x_k, y_k), \quad \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = f(x_k, y_k) \quad \text{və ya} \quad \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k)$$

Hesablamanın  $h = \frac{b - x_0}{n}$  addımını və bölgünün  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  şərtini qəbul edək.

$[x_0, b]$  parçasını  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)h, x_n = x_0 + nh = b$  nöqtələri vasitəsi  $n$  bərabər hissəyə bölməklə təqribi qiymətlərin ifadəsi tapılır (Petrovskiy, 2015):

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = f(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h,$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h, \dots, y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$$

Eyley hesablama üsuluna əsaslanaraq  $y(1) = 0,5$  başlangıç şərti və  $x \in [1; 10]$ ,  $n = 10$  bölgüsü üzrə verilmiş

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) \quad (4)$$

diferensial tənliyinin  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  təqribi qiymətləri tapılmışdır.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = y_0 + \frac{y_0}{x_0} \left( 1 + \ln \frac{y_0}{x_0} \right) \cdot h = 0,5 + \frac{0,5}{1} \left( 1 + \ln \frac{0,5}{1} \right) \cdot 0,9 = 0,638083768$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0,638083768 + \frac{0,638083768}{1,9} \left( 1 + \ln \frac{0,638083768}{1,9} \right) \cdot 0,9 = 0,610536807$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) \cdot h = 0,610536807 + \frac{0,610536807}{2,8} \left( 1 + \ln \frac{0,610536807}{2,8} \right) \cdot 0,9 = 0,507894121$$

$$y_4 = y_3 + f(x_3, y_3) \cdot h = 0,507894121 + \frac{0,507894121}{3,7} \left( 1 + \ln \frac{0,507894121}{3,7} \right) \cdot 0,9 = 0,386104736$$

$$y_5 = y_4 + f(x_4, y_4) \cdot h = 0,386104736 + \frac{0,386104736}{4,6} \left( 1 + \ln \frac{0,386104736}{4,6} \right) \cdot 0,9 = 0,274475761$$

$$y_6 = y_5 + f(x_5, y_5) \cdot h = 0,274475761 + \frac{0,274475761}{5,5} \left( 1 + \ln \frac{0,274475761}{5,5} \right) \cdot 0,9 = 0,184753309$$

$$y_7 = y_6 + f(x_6, y_6) \cdot h = 0,184753309 + \frac{0,184753309}{6,4} \left( 1 + \ln \frac{0,184753309}{6,4} \right) \cdot 0,9 = 0,118631006$$

$$y_8 = y_7 + f(x_7, y_7) \cdot h = 0,118631006 + \frac{0,118631006}{7,3} \left( 1 + \ln \frac{0,118631006}{7,3} \right) \cdot 0,9 = 0,073004375$$

$$y_9 = y_8 + f(x_8, y_8) \cdot h = 0,073004375 + \frac{0,073004375}{8,2} \left( 1 + \ln \frac{0,073004375}{8,2} \right) \cdot 0,9 = 0,043186244$$

$$y_{10} = y_9 + f(x_9, y_9) \cdot h = 0,043186244 + \frac{0,043186244}{9,1} \left( 1 + \ln \frac{0,043186244}{9,1} \right) \cdot 0,9 = 0,024604499$$

Eyler ədədi metodunun köməyi ilə hesablanmış  $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}$  qiymətləri cədvəldə verilmişdir. Eyler metodu əyaniliyinə və sadə həndəsi mənasına görə əhəmiyyətlidir. Eyler sınıq xətlər sxemi birtərtibli dəqiqliyi olan Runqe-Kutta sxemidir (Vlasenko, 2000). Runqe-Kutta sxeminin köməyi ilə təqribi qiymətlərini tapmaq üçün əvvəlcə, ədədləri aşağıdakı qaydada hesablanaraq funksiya artımı və təqribi qiyməti tapılır (Məmmədov, 1998):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) \cdot h, \quad k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \cdot h, \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot h, \quad k_4 = f(x_0 + h; y_0 + k_3) \cdot h, \\ \Delta y &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot h, \quad y_1 \approx y_0 + \Delta y. \end{aligned}$$

(4) diferensial tənliyinin göstərilən  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  təqribi qiymətləri Runqe-Kutta üsullu ilə hesablanmışdır. Hesablamalar  $y(1) = 0,5$  başlangıç şərti və  $x \in [1; 10]$ ,  $n = 10$  bölgüsünə əsasən yerinə yetirilmişdir. Verilmiş birtərtibli diferensial tənliyin Runqe-Kutta sxemi vasitəsilə göstərilən qaydada əvvəlcə  $k_1, k_2, k_3, k_4$  ədədləri, bunların köməyi ilə isə  $y_2, \dots, y_{10}$  təqribi qiymətləri tapılır (Paşayeva, 2026).

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) \cdot h = \left[ \frac{y_0}{x_0} \left( 1 + \ln \frac{y_0}{x_0} \right) \right] \cdot h = [0,5 (1 + \ln 0,5)] \cdot 0,9 = 0,138084 \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \cdot h = f\left(1 + \frac{0,9}{2}; 0,5 + \frac{0,138084}{2}\right) \cdot 0,9 = \\ &= [0,392443 \cdot (1 + \ln 0,392443)] \cdot 0,9 = 0,022829 \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot h = f\left(1,45; 0,5 + \frac{0,022829}{2}\right) \cdot 0,9 = \\ &= [0,352699(1 + \ln 0,352699)] \cdot 0,9 = -0,013376 \\ k_4 &= f(x_0 + h; y_0 + k_3) \cdot h = f(1 + 0,9; 0,5 - 0,01338) \cdot 0,9 = \\ &= f(1,9; 0,48662) \cdot 0,9 = [0,25612 \cdot (1 + \ln 0,25612)] \cdot 0,9 = -0,08347 \\ \Delta y &= \left[ \frac{1}{6} (0,138084 + 0,045658 - 0,026752 - 0,08347) \right] \cdot 0,9 = 0,012253 \\ y_1 &\approx y_0 + \Delta y = 0,5 + 0,012253 = 0,512253 \\ y_1 &= 0,512253, \quad x_1 = x_0 + h = 1,9 \\ k_1 &= f(x_1, y_1) \cdot h = \frac{y_1}{x_1} \left( 1 + \ln \frac{y_1}{x_1} \right) \cdot h = \\ &= \left[ \frac{0,512253}{1,9} \left( 1 + \ln \frac{0,512253}{1,9} \right) \right] \cdot 0,9 = -0,075412 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_1}{2}\right) \cdot h = f(2, 35; 0,47455) \cdot 0,9 = -0,10901 \\
 k_3 &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_2}{2}\right) \cdot h = f(2,35; 0,45775) \cdot 0,9 = -0,11147 \\
 k_4 &= f(x_1 + h; y_1 + k_3) \cdot h = f(1,9 + 0,9; 0,512253 - 0,11147) \cdot 0,9 = \\
 &= f(2,8; 0,40078) \cdot 0,9 = -0,121598 \\
 \Delta y &= \left[ \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] \cdot h = -0,106238 \\
 y_2 &\approx y_1 + \Delta y = 0,512253 - 0,106238 = 0,406016
 \end{aligned}$$

Verilmiş məsələnin şərtinə əsaslanaraq hesablamalar bu qayda ilə davam etdirilir.  $y_3, \dots, y_{10}$  qiymətləri uyğun olaraq bu sxeminin köməyi ilə və göstərilən ardıcılıqla əvvəlcə,  $k_1, k_2, k_3, k_4$  ədədləri hesablanaraq onlara uyğun  $\Delta y$  funksiya artımı müəyyən edilir, daha sonra  $y_k$  ( $k = \overline{3,10}$ ) təqribi qiymətləri tapılır (Elsqols, 2020).

0,288448, 0,192486, 0,121615, 0,075856, 0,04638, 0,027876, 0,016583, 0,009769.

Bu sxemlər müxtəlifliyi ilə fərqlənir. Runqe-Kutta üsulu diferensial tənliyin yüksək dəqiqliklə ədədi həlli baxımından əhəmiyyətlidir (Rutkas, 2003). Runqe-Kutta üsulunun ölçü tərtibi artdıqca məsələnin həlli bir o qədər cətinləşir və dəqiqlik az da olsa artır. Belə ki, bütün istifadə olunan yüksək tərtibli (məsələn beşinci tərtib) üsullar dəqiqliyə mində bir artım verə bilər. Ona görə də ədədi üsullardan istifadə edərkən, sadə üsuldən istifadə etməklə verilmiş parçanı daha kiçik hissələrə bölmək və ya daha mürəkkəb metodlardan istifadə edərək bu parçanın bölgü nöqtələrində funksiyanın hesablanması arasında həmişə seçim etmək məsləhət görülür (Aminov, 2022). Verilmiş parçaların müəyyən hissəsi elə bölünməlidir ki, bu bölgü nöqtələri daha düzgün nəticə versin. Bu, ümumiyyətlə, verilmiş məsələnin qoyuluşundan asılıdır. Ona görə də dördüncü tərtibdən yüksək Runqe-Kutta üsulundan çox istifadə edilmir və bütün bölgülər ailəsindən yalnız dördüncü tərtibli üsuldən istifadə olunur (Lukin və b., 2021).

Təqribi hesablanmış nəticələri dəqiq həllə müqayisə etmək məqsədilə verilmiş diferensial tənliyin dəqiq həlli tapılmışdır (Flippov, 2000.). Belə ki, (1), (2) məsələsinin ümumi və xüsusi həlli, yəni

$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$  diferensial tənliyinin  $y(1) = 0,5$  başlangıç şərtini ödəyən kvadratura ilə həlli

$$y' = \frac{y}{x} \left( 1 + \ln \frac{y}{x} \right), \quad dy = \frac{y}{x} \left( 1 + \ln \frac{y}{x} \right) dx, \quad \frac{y}{x} = t, \quad y = tx, \quad dy = tdx + xdt,$$

$$tdx + xdt = t(1 + \ln t)dx, \quad xdt = t \ln t dx, \quad \int \frac{dt}{t \ln t} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln t| = \ln|x| + \ln c, \quad \ln t = xc, \quad t = e^{xc}$$

şəklindədir. Beləliklə,  $y = xe^{xc}$  verilmiş diferensial tənliyin ümumi həlli,  $y = xe^{x \ln 0,5}$  isə  $y(1) = 0,5$  başlangıç şərtini ödəyən xüsusi həllidir. Burada  $0,5 = 1 \cdot e^c$ ,  $c = \ln 0,5 \approx -0,69315$ .

Yekunda  $x \in [1; 10]$ ,  $n = 10$ ,  $h = \frac{10-1}{10} = 0,9$  bölgüsü nəzərə alınaraq uyğun  $y_0 = y(x_0) = 0,5$  qiymətləri hesablanıb müqayisə edilir.

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1,9e^{-0,69315 \cdot 1,9} = 0,50909, & y_2 &= 2,8e^{-0,69315 \cdot 2,8} = 0,402044, \\
y_3 &= 3,7e^{-0,69315 \cdot 3,7} = 0,284702, & y_4 &= 4,6e^{-0,69315 \cdot 4,6} = 0,18968 \\
y_5 &= 5,5e^{-0,69315 \cdot 5,5} = 0,121534, & y_6 &= 6,4e^{-0,69315 \cdot 6,4} = 0,075786, \\
y_7 &= 7,3e^{-0,69315 \cdot 7,3} = 0,046324, & y_8 &= 8,2e^{-0,69315 \cdot 8,2} = 0,02789, \\
y_9 &= 9,1e^{-0,69315 \cdot 9,1} = 0,016583, & y_{10} &= 10e^{-0,69315 \cdot 10} = 0,009766
\end{aligned}$$

Beləliklə, hesablanmış  $y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}$  qiymətləri cədvəldə göstərilmişdir.

Məlumdur ki, diferensial tənliyi həll etmək həndəsi olaraq elə əyri tapmaq deməkdir ki, bu əyrinin istənilən nöqtəsində toxunanının istiqaməti uyğun nöqtədə meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşsün (Veysova, 2024). İnteqral əyrisinin hər bir  $M(x, y)$  nöqtəsindəki əyriyə toxunan üçün (3) şərtinin ödənməsini əsas götürərək

N	$x_k$	$y_k$	$y_k(E)$	$y_k(R-K)$
0	1	0,5	0,5	0,5
1	1,9	0,50909	0,638083768	0,512253
2	2,8	0,402044	0,610536807	0,406016
3	3,7	0,284702	0,507894121	0,288448
4	4,6	0,18968	0,386104736	0,192486
5	5,5	0,121534	0,274475761	0,121615
6	6,4	0,075786	0,184753309	0,075856
7	7,3	0,046324	0,118631006	0,04638
8	8,2	0,02789	0,073004375	0,027876
9	9,1	0,016583	0,043186244	0,016583
10	10	0,009766	0,024604499	0,009769

təqribi həlli quraq.  $M_0 = M(x_0, y_0)$  nöqtəsində inteqral əyrisinə toxunanın bucaq əmsalının  $k_1 = f(x_0, y_0)$  olduğunu nəzərə alaraq

$y - y_0 = k_1(x - x_0)$  və  $x = x_0 + \frac{h}{2}$  düz xətlərinin kəsişmə

nöqtəsini, yəni  $N_1\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1 h}{2}\right)$  nöqtəsini tapırıq.  $N_1$

nöqtəsində inteqral əyrisinə toxunanın bucaq əmsalı

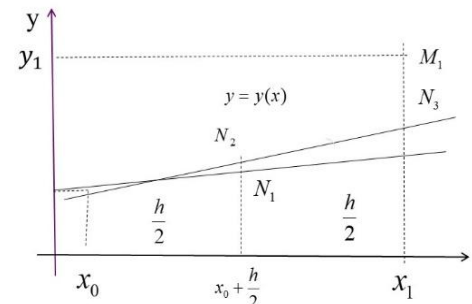
$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1 h}{2}\right)$  olduğundan  $M(x_0, y_0)$  nöqtəsindən

$x = x_0 + \frac{h}{2}$  düz xətti ilə kəsişməyə qədər bucaq əmsalı  $k_2$  olan

$y - y_0 = k_2(x - x_0)$  düz xəttini keçirib  $N_2\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2 h}{2}\right)$  nöqtəsini tapırıq.  $N_2$  nöqtəsində inteqral

əyrisinə toxunanın bucaq əmsalı  $k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2 h}{2}\right)$  olacaq. Belə ki,  $M(x_0, y_0)$  nöqtəsindən

$x = x_0 + h$  düz xətti ilə kəsişməyə qədər bucaq əmsalı  $k_3$  olan  $y - y_0 = k_3(x - x_0)$  düz xəttini keçirib  $N_3(x_0 + h; y_0 + k_3 h)$  nöqtəsini tapırıq.  $N_3$  nöqtəsində əyriyə toxunanın  $k_4 = f(x_0 + h; y_0 + k_3 h)$



bucaq əmsalını tapaq. Məsələnin təqribi həlli olan sınıq xətt parçasının istiqaməti  $k = \Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot h$  və  $M(x_0, y_0)$  nöqtəsindən  $x = x_0 + h$  düz xətti ilə  $M_1 = M(x_1, y_1)$  nöqtəsində kəsişməyə qədər  $y - y_0 = k(x - x_0)$  düz xəttini keçirilir. Burada  $y_1 = y_0 + k = y_0 + \Delta y$  həllin  $x_1 = x_0 + h$  nöqtəsində təqribi qiymətidir.

## Nəticə

Runqe-Kutta ədədi metodlarının köməyi ilə verilmiş diferensial tənliyin təqribi həlli tapılmış və hesablamaların nəticələrini müqayisə etmək məqsədilə bu diferensial tənliyin təqribi və dəqiq həllindən alınan hesablama nəticələri həm analitik, həm də cədvəl şəklində göstərilmişdir. Müqayisəli təhlil onu göstərir ki, Eylər və dəqiq həldən alınan nəticələr fərqlinin orta qiyməti üçün faiz dəyişməsi təqribən 1,1%, Runqe-Kutta ədədi metodundan və dəqiq həldən alınan nəticələr fərqlinin orta qiyməti isə 0,1% olmuşdur. İnteqral əyrisinin hər bir nöqtəsində başlanğıcda verilmiş əyriyə toxunanın bucaq əmsalına əsasən tapılmış Runqe-Kutta əmsalları hər bir  $h$  addımında düz xətlərin kəsişmə nöqtələrini və bu nöqtələrdə inteqral əyrisinə toxunanların bucaq əmsallarının tapılmasına əsas vermişdir. Göstərilmişdir ki, toxunanların tapılmış bucaq əmsallarına uyğun  $\Delta y$  funksiya artımı və tənliyin  $y_k$  ( $k = \overline{3,10}$ ) inteqral əyrisinin istənilən nöqtəsində toxunanının istiqaməti uyğun nöqtədə meydanın istiqaməti ilə üst-üstə düşür ki, bu da klassik nəzəriyyəyə uyğundur. Dəqiq həllin tapılması məlum olmadıqda diferensial tənliklərin inteqrallanması üçün öz həndəsi görünüşünə və alqoritmik sadəliyinə görə Eylər metodunun tətbiqi, dəqiqliyinə görə Runqe-Kutta üsulu əhəmiyyətlidir.

## Ədəbiyyat

1. Aminov, R. Ş. (2022). Primenenie metoda Runge-Kutti dlya reşeniya uravneniya. *Mejdunarodny jurnal "Vestnik Nauki"*, 10(55), 101–105.
2. Astashova, İ.V. (2012). *Differensialne uravneniya*. Nauka.
3. Elsqols, L.E. (2020). *Differensialnie uravnenie i varisionnie işçisleniya*. Nauka.
4. Flippov, A.F. (2000). *Sbornik zadaç po differensialnim uravneniyam*. Nauka.
5. İpatova, V.M., Pırkova, O.A., Sedov, V.N. (2012). *Differensialnie uravneniya*. MFTİ.
6. Lukin, V.V, Korcaqov, V.N., Sautkina, S.M. (2021). Ob ustoycivix metodax Runge-Kutti dlya reşeniy hiperboliceskix uravneniy razrıvımın metodom Qalyorkina. *Differensialnie uravneniya. RAN*, 57(7), 951–962. ISSN: 0374-0641.
7. Məmmədov, R.H. (1998). *Ali riyaziyyat*. Elm.
8. Paşayeva, S.T. (2026). Diferensial tənliklərin qeyri-kvadratur həllində müqayisəli təhlil. *Elmi Qaynaqlar. XXVI Respublika Elmi Konfransı*, 107–111. <https://doi.org/10.36719/2663-4619/XXVI/RK/Eİ/2026>
9. Petrovskiy, İ.Q. (2015). *Leksii po obıknovennix differensialniy uravneniy*. Nauka.
10. Rutkas, A.G. (2003). Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations. *Nonlinear Analysis. TMA*, 55(1-2), 125–139.
11. Vlasenko, L. (2000). Implicit Linear Time-dependent Differential-difference Equations and Applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 23, 937–948.
12. Veysova, S.Ə. (2024). Adi diferensial tənliklərin Pikar üsulu ilə həllində xətalarnın qiymətləndirilməsi. *ELMİ İŞ Beynəlxalq Elmi Jurnal*. 2024 / Cild:18 Sayı:12/142-149 . <https://doi.org/10.36719/2663-4619/109/142-149>.